

[返回首页](#)

本文原刊于《考古》2005年第6期第57-65页。

## 睡虎地秦简与先秦数学

邹大海

（北京，100010，中国科学院自然科学史研究所）

**摘要：**本文将秦律和《九章算术》、《算数书》及其他先秦文献结合起来，从社会背景 and 需要来讨论 1975 年底湖北云梦睡虎地出土的秦律对研究先秦数学史的价值。作者认为：秦简所载法律条文建立在高度发达的数学基础之上，《九章算术》的主要的数学方法在先秦已经出现，法家与数学确曾发生过关系，但不是在汉代而是在先秦。

**关键词：**睡虎地秦简    先秦数学    九章算术    算数书    法家

1975 年底湖北云梦睡虎地 11 号墓出土了大量竹简，主要是法律、文书。墓主可能是出土的《编年记》中的喜，他生于秦昭王 45 年（公元前 262 年），在秦王政时历任安陆御史、安陆令史、鄢令史等与法律有关的职务，他很可能卒于秦始皇 30 年即公元前 217 年。由于墓主之死上距秦始皇统一六国仅 4 年，所以墓中出土的这批竹简对战国以迄秦汉历史的研究，具有十分重要的意义，受到文史界的广泛关注。但以往的论作很少注意到它对科技史研究的价值。其实它对科技史研究，特别是对从社会的政治经济背景和科技的关系来考察科技史有很高的价值。郭世荣、冯立升先生虽曾用汉简和睡虎地秦简论及数学与社会经济的关系，但较简括且限于秦汉时代<sup>①</sup>。本文则拟利用睡虎地秦简来研究先秦数学史。

传世的中国数学著作，以《周髀算经》和《九章算术》为最早。前者主要是以数学为工具阐述盖天说，后者才是典型的数学著作，它形成了中国古典数学的代表性模式。《九章算术》内容丰富，门类齐全，学术界普遍认为它是先秦以迄秦汉数学的集大成之作。但其中先秦数学占到多少份额，则不易论定。过去钱宝琮先生认为《九章》方田、粟米、衰分、少广、商功五章的绝大部分出于先秦<sup>②</sup>，主要是从当时有此类社会需要的角度来估定的；郭书春先生则认为《九章》整书的大部分都出于先秦，除社会

需要外，还从《九章》的结构和刘徽关于《九章》编纂说法的某种吻合以及刘徽的求实态度来考虑<sup>□</sup>。但两家的论据与结论之间尚缺着较大的环节，从当时有此社会需要来说明其观点时都过于简括。由于粗略地看，比《九章》方法更原始的同类方法也可与先秦的社会需要相适应，所以，需要对先秦数学所达到的高度有一个切实的估价来支持，二位先生的观点才有说服力。睡虎地出土的秦律，正好提供了这种估价所需的材料。

## 一、 透过秦律对会计、统计的严格要求看先秦数学

统计、会计对国家进行有效管理至为重要，先秦文献中大量提到“计”、“会”、“会计”、“计数”等，实际都包含统计和会计工作，但比今天的“会计”和“统计”要宽一些，包含更多的与此相关的管理工作（如考核和分配等）。统计和会计要求相关人员通晓相应的计算方法。秦律对会计和统计的严格要求，说明当时对相关官吏的数学水平有较高的要求。

睡虎地秦简《效律》说“计校相谬也，自二百廿钱以下，谇官啬夫；过二百廿钱以到二千二百钱，赀一盾；过二千二百钱以上，赀一甲。人户、马牛一，赀一盾；自二以上，赀一甲”<sup>□</sup>。会计经过校算发现误差，错算数目在二百二十钱以下的，斥责该官府の啬夫；超过此数而不多于二千二百钱的，要罚一盾；超过二千二百钱的，要罚一甲。错算人口一户或牛马一头的，要罚一盾；错算两户或更多的，要罚一甲。《效律》的另一段则说：“计脱实及出实多于律程，及不当出而出之，值其价，不盈廿二钱，除；廿二钱以到六百六十钱，赀官啬夫一盾；过六百六十钱以上，赀官啬夫一甲，而复责其出也。人户、马牛一以上为大误。误自重也，减罪一等”。也就是：会计帐目和实际数目相比，差数超过了法律规定的限度，和不应销帐而销了帐，要估计其价值，不满二十二钱的，可免罪；在二十二钱到六百六十钱之间的，要罚该官府の啬夫一盾；超过六百六十钱的，要罚该官府の啬夫一甲，并要责令赔偿所销帐的东西。错算人口一户或牛马一头以上便属大误。如系自行查出的错误，可减罪一等<sup>□</sup>。看来，秦律对经济上差错的处罚是非常严厉的。之所以有这样严厉的法规，除了官吏不贪赃枉法外，还必须官吏有较高的管理能力，这其中就少不了要有较高的数学计算能力。

秦律还规定了在具体负责会计的人员有过失时，其上司应负的责任。《效律》云：“尉计及尉官吏即有劾，其令、丞坐之，如它官然”，“司马令史掾苑计，计有劾，司马令史坐之，如令史坐官计劾然”。这是说县尉的会计以及县尉官府中的吏如有罪行，该县县令、县丞应承担罪责，和其它官府一样；司马令史掾管理苑囿的会计，如会计有误，司马令史应承担罪责，和令史承担官府会计的罪责一样<sup>□</sup>。可见这种对下属有过失时也要追究上司的法律，是十分严厉的。《效律》不避秦始皇讳，其写作时代很可能早于始皇元年即公元前 246 年，行用于战国时期。经济管理工作中的统计、会计必须用到大量

的计算方法，秦律能有这样严厉的规定，必然以当时大批官吏掌握了相应的计算方法为前提。因此，战国时代的数学水平不宜低估。

二、 从关于几种米的换算比例看《九章算术》粟米章的渊源

《九章算术》第二粟米章以比例算法（称为“今有术”）为核心，主要讲各种粮食换算的数学方法，也包括相关的一些其他问题和方法。该章开首说：

粟米之法：

粟率五十	粳米三十
粳米二十七	𥽿米二十四
御米二十一	小麦十三半
大麦五十四	粳饭七十五
粳饭五十四	𥽿饭四十八
御饭四十二	菽、荅、麻、麦各四十五
稻六十	豉六十三
𥽿九十	熟菽一百三半
𥽿一百七十五 <sup>□</sup>	

《说文解字》米部也有关于几种米的换算比例<sup>□</sup>：

- 1 粟重一<sup>秬</sup>为十六斗太半斗，舂为米一斛曰粳。 (粳字条)
- 2 𥽿，米一斛舂为八斗也。 (𥽿字条)
- 3 𥽿，粳米一斛舂为九斗曰𥽿。 (𥽿字条)

4 稗，穀也，从米卑声。

（稗字条）

取粟率为 50，则《说文》中粟、粦、𥽿、稗、穀之比为 50：30：27：24：24。《九章》粟、粦、𥽿、稗之比为 50：30：24：27。两文献中𥽿和稗之比是互换的，且《九章》没有出现穀。段玉裁把《九章算术》视为张苍的作品，又据郑玄、吕忱的说法与《九章》所载相同，谓“许在张苍之后，郑、吕之前，断无乖异”，一口咬定《九章算术》的数据是对的，《说文解字》原来也不误，是后世传写过程中发生了错误，他还据此改动了《说文》<sup>□</sup>。

睡虎地秦简《仓律》说：

[粟一]石六斗大半斗，舂之为粦米一石；粦米一石为𥽿米九斗；九斗为穀米八斗。稻禾一石，为粟廿斗，舂为米十斗；十斗粦，穀米六斗大半斗。麦十斗，为𥽿三斗。菽、荅、麻十五斗为一石。稟穀稗者，以十斗为石。<sup>□</sup>

“粟一”二字为秦简整理小组补。从下引《算数书》文字看，也许补“禾黍一”更合适些。

近期公布的湖北江陵张家山 247 号墓（约公元前 186 年下葬）出土的《算数书》也引了一段秦律：

程曰：禾黍一石为粟十六斗泰半斗，舂之为粦米一石，粦米一石为𥽿米九斗，𥽿米[九]<sup>□</sup>斗为穀米八斗。王程曰：稻禾一石为粟廿斗，舂之为米十斗为穀，粦米六斗泰半斗。麦十斗，𥽿三斗。程曰：麦、菽、荅、麻十五斗一石，稟穀𥽿者，以十斗为一石。<sup>□</sup>

“粦”字前“为穀”二字整理者作连下读，今改为连上读。两段出土文献基本相同，只是秦简中“粦”、“穀”二字误倒，《算数书》把秦律的“稟穀稗者”引作“稟穀𥽿者”，即“稗”换成了“𥽿”。另外，《算数书》还有其他条目涉及粮食的比率，但没有出现𥽿，而代之以稗。笔者曾分析过上引《说文》、《九章》、秦简《仓律》和《算数书》的异同，指出：“𥽿”和“稗”在汉初或更早时代曾用来指同种精度的米；《说文》的稗率不是错误的，就是后起的；《九章》的错误是𥽿米和相应的𥽿饭的比率，即“穀”被误作了“𥽿”<sup>□</sup>。

那么，《九章》这个错误是否后世传写过中程才出现的呢？现传《九章》“粟米之法”中稗饭和𥽿饭之比为 54：48=27：24，与稗米和𥽿米之比正同；同时，经笔者校算，不仅粟米章的问题都按此比例计算，而且《九章》全书也都按此比率计算。由此看来，这一错误不会是传写之误。那么，有没有可能是后来的学者根据“粟米之法”第一个错倒的数据改动了汉《九章》的其他数据呢？这种可能性也是微乎其微的，因为找不到任何的证据，而且东汉时郑玄（127-200）通晓《九章》，并已经用此错误的数据来注解经书了。所以，这个错误的数据，应是西汉晚期编成《九章》时就已经有了的。

《九章》的这个错误，至少说明粟米章不可能直接出于秦汉两朝负责谷物的官吏之手，而是一定程度上脱离这种实际工作的学者所为。秦律的主要部分成于秦统一六国以前，特别是《秦律十八种》不避秦始皇嬴政之讳，其年代当早于始皇，在公元前 246 年以前。另外，这批竹简中还抄有两条颁布于魏安釐王 25 年（公元前 252 年）的魏国法律，也说明此墓中出土先秦法律文书是不奇怪的。因此，早在先秦就有了这种按比例换算的实际活动，先秦的学者按一组稍有错误的比例设置问题也是有可能的。《算数书》既引秦律以粳率 9（以粳为 10），又有大量以粳率为 9 的问题，说明《九章》之以粳率为 9（不同于许慎之以粳为 8）确实可能出于先秦。退一步说，即使粟米章按此错误比例设置的内容晚出，由秦简和《算数书》也可推断在先秦仍会有按正确比例进行计算的事实，也会有同样的算法。所以，我们至少可以说粟米章有早在先秦的渊源。另外，秦简中的比例带有分数，而传世文献和一些先秦器物也用到分数，说明先秦产生了解决基于分数运算的问题的方法。

关于《九章》的编纂，学术界正逐渐统一到魏晋时刘徽的观点上来。刘徽说：“周公制礼而有九数，九数之流，则九章是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。”<sup>①</sup>也就是说：张苍、耿寿昌收集免于秦始皇焚书的首秦《九章》残简，进行整理和删补，调整了数学的科目，并在一定程度上用当时的语言改写而形成汉代的《九章算术》。张苍历战国、秦、汉三代，他在汉代曾为计相，做过会计工作；他定章程，包括对历数和度量衡的确定。耿寿昌在汉宣帝时任大司农中丞，担负有关农业水利漕运之事。如果粟米章为张苍、耿寿昌所撰，那么他们应是从实际中直接归纳出这些问题的，以他们的条件，当不至于犯把粳米和粳米比例颠倒或把“穀米”误成“粳米”的错误。而如果这些问题是早已有之，那么，他们在编辑《九章》时未加考究而承袭这些错误则完全可能。因此，我们认为粟米章与“粟米之法”相关的问题源于先秦。

### 三、从秦简看比例分配问题

《九章算术》第三衰分章处理比例分配问题。遇有公事，分配粮食和工程量是必需的，这时必定会用到衰分方法。从秦简可以看出，这种方法在先秦必然已经用到了。秦简《仓律》云：

隶臣妾其从事公，隶臣月禾二石，隶妾一石半；其不从事，勿稟。小城旦、隶臣作者，月禾一石半石；未能作者，月禾一石。小妾、舂作者，月禾一石二斗半斗；未能作者，月禾一石。婴儿之毋母者各半石；虽有母而与其母冗居公者，亦稟之，禾月半石。隶臣田者，以二月月稟二石半石，到九月尽而止其半石。舂，月一石半石。隶臣、城旦高不盈六尺五寸，隶妾、舂高不盈六尺二寸，皆为小；高五二寸，皆作之。<sup>②</sup>



这里对公事活动中隶臣、隶妾、小隶妾、小孩等各种不同身分的人的粮食分配都有一定标准，而且要根据不同的情况和时间供给，其比例数值含有分数，说明当时对复杂的分数运算已经烂熟。由于在这种公事活动中会遇到各种情况，如现有若干粮食，要了解能支用多久和多少人，还缺多少需要从新调拨等问题（对照后面引《左传》中关于修建工程的记载），这时肯定要用到包括衰分术在内的很多计算方法，而且这种衰分术是适用于分数情况的，这实际比《九章》衰分术的不少问题的运算还要复杂。因此，衰分方法产生于先秦，《九章》的衰分章必有其先秦的渊源。

#### 四、从秦简和先秦文献看商功和均输等问题

《九章算术》第五商功章处理工程问题，要用到多种形体体积的计算和工程当量的计算。《左传》（详下）等文献记载春秋时修建大型工程，事先要做计划，其中肯定要用到多种形体的体积计算和工程当量的计算。秦律规定度量衡不准确要受罚，说明当时计算体积、容积的水平不宜低估。如睡虎地秦简《效律》载：“衡石不正，十六两以上，赀官啬夫一甲；不盈十六两到八两，赀一盾。桶不正，二升以上，赀一甲；不盈二升到一升，赀一盾。”“斗不正，半升以上，赀一甲；不盈半升到少半升，赀一盾。半石不正，八两以上；钧不正，四两以上；斤不正，三铢以上；半斗不正，少半升以上；参不正，六分升一以上；升不正，廿分升一以上；黄金衡累不正，半铢以上，赀各一盾”<sup>□</sup>。这里规定了衡石（重量的一石）、桶、斗、半石、钧、斤、半斗、参（ $1/3$ 斗）、升、黄金衡累（称黄金用的天平法码）等不准确时应受的处罚。这些处罚，是针对贪脏枉法和玩忽职守者的，忠于职守的自然不会有问题。因此，他们在度量衡的制作中用到的面积和体积计算方法问题，应已解决，而且实际上应能达到比此精密得多的程度。可见，战国时代关于体积和容积的计算方法已经很高级了。

秦简中提到大量的工程当量。如《秦律十八种·工人程》“隶臣、下吏、城旦与工从事者冬作，为矢程，赋之三日而当夏二日”，矢程指放宽生产的标准。这里说在冬季劳动时，三天收取相当于夏季两天的产品。又“冗隶妾二人当工一人，更隶妾四人当工一人，小隶臣妾可使者五人当工一人”，这是以一工匠一人为标准，规定冗隶妾（可能是做零杂活的）2人相当于工匠1人，更隶妾（以部分时间轮流为官府服役的）4个人相当于工匠1人，而能够做点事情的小隶妾（据居延汉简指七岁以上的儿童）则5个人相当于工匠1人。又“隶妾及女子用针为缣绣它物，女子一人当男子一人”，这是说隶妾和一般女子用针做刺绣类产品时，女子1人和男子1人相当<sup>□</sup>。银雀山汉简《守法守令》（作于战国时期）也说“乃为分职之数，齐其食饮之量，均其作务之业”<sup>□</sup>。这里“均其作务之业”就是要考虑各种工程量的比例关系。先秦规定这些工程当量，为的是计算产品和工作量；同时也会用来分配工作量和劳动力，这就需要用到比例分配方法，这就是《九章》衰分章的方法。

应该说，这种工程当量与《九章》商功章是有区别的，后者主要涉及土方工程的当量问题。大概与《工程人》中的工程当量有关的问题实际是用衰分章和粟米章的比例方法解决的，所以《九章》商功章没有收录这类问题。

《九章》均输章前四问是均输本术问题，要根据路途远近、物价、劳动力价格等多个参数中的若干个因素，计算出在每人（或每户、每算）负担平均的情况下，每个单位应出的粮食或人数。这几个问题比该章后面的问题要复杂得多。如果先秦能有均输本术的数学方法，那么产生该章其他问题的方法就不成问题。

从先秦文献中我们可以看到，当时是考虑了这种由多个参数确定某个指标的问题的。《国语》：“季康子欲以田赋，使冉有访诸仲尼。仲尼不对，私于冉有曰：‘求来！女不闻乎？先王制土，籍田以力，而砥其远迩；赋里以入，而量其有无；任力以夫，而议其老幼……若子季孙欲其法也，则有周公之籍；若欲犯法，则苟而赋，又何访焉。’”<sup>□</sup>。孔子说先王时按土地的肥瘠、人体力的强弱（年龄是一个重要因素）、土地的远近等方面分为不同差等征收赋税，这显然是均输的思想，至少牵涉 3 个参数。从孔子后面的话看，此种先王之法是本于周公的，看来均输思想确是源远流长。《吕氏春秋·季秋纪》“是月也……与诸侯所税于民轻重之法。贡职之数，以远近土地所宜为度，以给郊庙之事，无有所私”<sup>□</sup>。高诱注云：“诸侯所税轻重，职贡多少之数，远者贡轻，近者贡重，各有所宜”，说明要使远近不同的地方都有相同的负担。《荀子·王制》也说“王者之[法]：等赋，政事，财万物，所以养万民也。田野什一，关市几而不征，山林泽梁，以时禁发而不税，相地而衰政，理道之远近而致贡，通流财物粟米，无有滞留，使相归移也。四海之内若一家，故近者不隐其能，远者不疾其劳，无幽间隐僻之国莫不趋使而安乐之”<sup>□</sup>。关市萧条要免税，山泽在某一时间禁发时也要免税，收税时考虑土地肥沃的差等、路途的远近。这里涉及市场情况、山泽状况、土地肥瘠、路途远近、财物粮食的价格（“通流财物粟米”必然与价格密切相关）共 5 个因素，其中至少后 3 个因素是要在同一个问题中同时考虑的。《左传》宣公十一年（前 598）“令尹蒍艾猎城沂，使封人虑事，以授司徒。量功命日，分财用，平板干，称畚筑，程土物，议远迩，略基趾，具餼粮，度有司。事三旬而成，不愆于素”<sup>□</sup>。令尹蒍艾猎为了建一座城，先要让主管筑城的封人做规划，然后上报司徒，规划做得很周密，结果工程进行 30 天就完成了，和计划的工期没有差错。这里提到规划时考虑的问题有：计算工作量的多少，各项目所用的时间，相应所需财物和经费的开支，要使筑墙所需的夹板和支柱相匹配<sup>□</sup>，让运土和筑土相适应，计算土方和材物使正好合适，考虑运输的远近对工程的影响，考察基址的情况，计算应准备的粮食，审查相关官员的能力等。《左传》昭公三十二年（前 510）“己丑，士弥牟营成周，计丈数，揣高卑，度厚薄，仞沟洫，物土方，议远迩，量事期，计徒庸，虑财用，书餼粮，以令役于诸侯。属役赋丈，书以授帅，而效诸刘子。韩简子临之，以为成命”<sup>□</sup>。这里讲士弥牟在设计营建成周时，要考虑城的长、宽、高，沟的形制，土地的情况，道路的远近，计算工程所要的时间、人工、财物、粮食的多少，与蒍艾猎建城时要考虑的因素差不多。在制定计划时要考虑这么多因素，肯定要用到复杂的计算方法（严敦杰<sup>□</sup>、郭书春<sup>□</sup>先生都曾指出这种工程需要用到很多数学方法）。其中，至少挖土、运土、筑土属于同一个工作流程，从数学计算来讲则是一组互相关联的参数，这组参数又与采土的土质有关，而运土又和路途远近有关，为了不出现有的环节人浮于事、有的环节又忙不过来的情况，就势必要以各个环节在同一时间内处理的

土方相等为前提，计算各环节应安排的人数，这与《九章》的均输术具有同样的数学模型，只是均输术的基础负担平均换成了处理的土方相等而已。实际上，上述古人制定大型工程时要考虑的因素比《九章》的还要多，不仅要用到均输方法，而且也用到商功和勾股测量方法，至于说必须用到《九章》粟米章的比例方法、衰分章的比例分配方法这些更简单的数学方法，则更不在话下。营建大型的水利、城防、建筑等工程，事先要有周密的策划，在施工进程中又要灵活调整，才能使工程正常进行。因此，商功、均输类的典型方法和勾股类的某些测算方法是必然要用到的。但是，这些数学方法比起《九章》中相应的具体方法，也有可能水平要低得多。因为如果对工程的计划与实际完成的情况之差异没有太严格限制的话，古人利用比较原始的、经验的方法算出一个大致的结果也可以交差。但从秦简看，战国时确实已用到了十分先进的数学方法。

秦律规定，工程出了问题，要按律追查责任。《秦律十八种·徭律》载有工程问题的处罚规定。如征发徒众营建城邑，要对所筑的墙担保一年。不满一年而墙坏，主持工程的司空和负责该墙的君子都有罪，要令原来筑墙的徒众重新修筑，且不得算入服徭役的时间。而且“县为恒事及<sub>7</sub>献有为也，吏程功，赢员及减员自二日以上，为不察。上之所兴，其程功而不当者，如县然。度功必令司空与匠度之，毋独令匠。其不审，以律论度者，而以其实为徭徒计”。这里，“员”训数<sup>□</sup>。说明县里进行经常性的及经呈报批准的工程，由吏估算工程量，如施工时间比所估算的时间相差（不论是超过或不足）两天以上，就要以不察论处。县以上的征发，如估算的工程量不准确，与县级同例。估算工程量，必须由司空和匠人一起估算，不得单令匠人估算。如果估算得不好，要对估算者依法论处，再按实际情况计算所需服徭役的徒众的数量。秦律的这种规定，为相关的商功和均输等类计算方法提出了高要求，如果开始时这类方法还欠成熟的话，这种规定必然会促进这些方法的进步。秦律对估算差误的严厉处罚，则正是这些数学方法已经成熟的表现。因此，说《九章》的商功和均输类的典型数学方法（不一定是其中的文字）在先秦已经成熟，不是过分之辞。另外，战国时代有好些大型的水利工程（如秦国的都江堰、郑国渠，工程都十分浩大）涉及山川地势，还必须用到《九章》勾股章的方法测算，因此，联系秦律对工程规划和施工的严格要求（对都江堰这类特大工程不一定实行得这么严）看，勾股章的各种方法中也出于先秦的比例可能比原来想象的要大得多。

睡虎地秦简《效律》说：“上即发委输，百姓或之县僦及移输者，以律论之”<sup>□</sup>。委输即以车运送。僦是雇人车载送。移输是把应当由本人运送的物品转交给别人运送。秦律规定朝廷如果征发运输的劳役，百姓有到县里雇车或转交他人运送的，应依法论处。这从另一个侧面反映了当时是有人愿意出钱雇人运送的，所以，朝廷在征发徭役和收取租税时肯定会考虑到路途的远近、当时的运费（劳动价格、租车的价格等）的因素，而这就是典型的均输问题。秦律禁止雇人和车运送，看来此前是有这种雇佣运送的。另外，秦律的目的可能是抑制商业流通，在先秦其他诸侯国，这种雇佣运输的情况，至少也应是存在过的。这又从一个侧面说明《均输》章中均输粟类题目有其先秦的渊源。

上面我们分四项讨论睡虎地秦简对于研究先秦数学史的意义，由于中国古代数学与实际密切相关，我们实际上从秦简所能琢磨到的先秦数学的信息还不止于此。如《仓律》说



出禾，非入者是出之，令度之，度之当题，令出之。其不备，出者负之；其赢者，入之。杂出禾者勿更。入禾未盈万石而欲增积焉，其前入者是增积，可也；其它人是增积，积者必先度故积，当题，乃入焉。后即不备，后入者独负之；而书入禾增积者之名事邑里于廛籍。<sup>□</sup>

又《效律》说仓库的粮食坏了，“禾粟虽败而尚可食也，程之，以其耗石数论负之”<sup>□</sup>。《秦律杂抄》“工久榦曰不可用，负久者，久者谒用之，而赀工曰不可者二甲”<sup>□</sup>。这里的“负”和“赢”、“增”相对，是赔偿的意思，和负数的概念是相通的。居延汉简和公元前 2 世纪的董仲舒《春秋繁露·考功名》都用到负数概念<sup>□</sup>。《九章》的负数只见于方程章，看来是在方程式之间相减出现不足的情况下引进的，因此方程的出现实际比负数要早。出土《算数书》中出现负数，并用到正负数的乘除法，可能是针对医生治病效果的考核问题<sup>□</sup>，说明负数的使用至迟可以推到公元前 2 世纪的初年。结合战国时代秦简透露的信息看，说方程章有其先秦的渊源是可信的。

## 五、从秦律看《九章算术》与先秦数学

限于篇幅，上面的讨论还没能涉及秦简中能反映先秦数学信息的全部材料。而且，由于睡虎地秦简所抄秦律只是秦律的一部分，有些还只是摘抄，我们可以想见，战国时代的法律制定和施行，必定建立在当时数学知识高度发达的基础之上。另一方面，战国时代一些国家（特别是秦国）的严刑峻法也会为数学提出更高的要求，从而促进数学的进步。看来，法家与数学的关系乃是一个十分有意义的课题，“文革”期间“评法批儒”时出现的有关法家与《九章算术》关系的文章，也不是一点道理都没有。

从社会背景来说，汉代并不比战国时代更具备对数学有更高要求的社会基础，相反，战国时代法家的严苛有着深广的影响，尤其是秦简所反映的秦国在社会经济管理中的严厉法律（最典型的是对工程计划和实际完成时限差异的处罚规定，其严厉程度在中国历史上恐怕是无出其右的），说明当时数学必定有很高的水平。因此《九章算术》主要数学方法的产生时代，只能是战国或更早的时代，或最多延续到秦代，而不会是汉代；法家对数学的影响也主要发生在先秦或秦代而不是前人所说的汉代。刘徽的说法，确实是有根据的。

从数学发展的角度看，说《九章》的主要方法产生于先秦也是合理的。数学在西周时已成为贵族子弟学习的一门课程（按《周礼》的说法叫做“九数”），当时至少已积累了基于十进位置值制记数法和整数四则运算的一批数学方法。春秋时代已大量使用分数，基于“九九”表和算筹的四则运算已经普及，《左传》中记载的几次工程，实际要用到类似《九章》中衰分、商功、均输、勾股等章的数学方法（可能低些，笔者另有论述），《周髀算经》载陈子（在春秋末季或战国初年）答荣方问所说“此皆算术之所及也”的“算术”，大概有书可依（有人甚至以为指《九章》，虽无证据，但先秦可能真存在一本有古老渊源的书为《九章》所宗）。因此战国以前中国数学已经积累了进一步发展的基础。战国时

代，墨家和名家对逻辑推理规范的研究和对一些数学或与有数学有关的概念及命题的认识，反映出战国时代具备创造《九章》数学方法所需要的逻辑推理水平<sup>1</sup>。因此，先秦时代产生《九章》数学方法的数理条件也已具备。近期发表的编成早于公元前 186 年的《算数书》是一本取材于多种著作的撮编之书，虽然和《九章算术》没有直接的文本影响关系，但其中所反映的在西汉初年甚至更早时代流传的数学知识，说明把《九章》数学方法的产生时代返推到先秦是可行的<sup>2</sup>。考虑到《算数书》的撮编性质，它所取材的书会更早，其中必有超过该书的其他内容，所以先秦数学所取得的成就确实是不应低估的。

总之，结合数学发展的原始积累、所需要的数理条件、社会经济背景 and 需要、刘徽的记载以及出土《算数书》的性质与内容等多方面看，《九章》主要数学方法确实是应产生于先秦的。这里，睡虎地秦简为我们确认《九章》中一些典型的数学方法特别是部分复杂的数学方法出于先秦提供了坚实的时间标尺。不仅如此，秦简还为我们研究先秦科学技术与当时社会背景和文化思潮的关系提供了新的视野，值得学术界多加重视。

本成果属于国家自然科学基金项目“《算数书》与先秦数学”（类别：A，批准号：10171107）和德国马克斯·普朗克学会科学史研究所——中国科学院自然科学史研究所伙伴小组（Partner Group of the Max-Planck-Institute for the History of Science at the Institute for the History of Natural Sciences, Chinese Academy of Sciences）。本文前两稿分别于 2000 年 8 月和 2001 年 10 月在北京举行的第六届中国科学技术史学会代表大会和香港举行的第九届国际中国科学史会议上宣读。

注 释

<sup>1</sup> 李迪主编：《中国数学史大系》第 1 卷，北京师范大学出版社，1998 年，320-364，463 页。

钱宝琮主编：《中国数学史》，科学出版社，1981 年，14 页。

郭书春：《古代世界数学泰斗刘徽》，济南：山东科学技术出版社，1992 年，94-105 页。又郭书春：“张苍与《九章算术》”，见《科史薪传——庆祝杜石然先生从事科学史研究 40 周年学术论文集》，沈阳：辽宁教育出版社，1997 年，112-121 页。

睡梦虎地秦墓竹简整理小组：《睡虎地秦墓竹简》，北京：文物出版社，1978 年，125 页。为避免繁琐，所引秦简及《算数书》原文中的异体字、错字、假借字，一般按通行字处理。

同[4]，124-126 页。

同[4 QUOTE \\* MERGEFORMAT ]，124-125 页。

郭书春：《〈九章算术〉汇校本》，沈阳：辽宁教育出版社，1990 年，213-214 页。

许慎：《说文解字》，北京：中华书局，1987 年，147-148 页。

段玉裁：《说文解字注》，上海：上海书店，1992 年，334 页。

同[4]，44-45 页。

原释文缺“九”，据睡虎地秦简补。彭浩已校，见彭浩《中国最早的数学著作》，载《文物》2000 年第 9 期 85-90 页。

江陵张家山汉简整理小组：《江陵张家山汉简《算数书》释文》，载《文物》2000 年第 9 期 78-84 页。

邹大海：“从《算数书》和秦简看上古粮米的比率”，刊《自然科学史研究》2003 年 10 月第 22 卷第 4 期第 318-328 页。

同[7]，177 页。

同[4]，49 页。

同[4]，113-115 页。

同[4]，73-75 页。

银雀山汉墓竹简整理小组：《银雀山汉墓竹简[壹]》，北京：文物出版社，1985 年，释文 146 页。

上海师范大学古籍研究所校点：《国语》，上海：上海古籍出版社，1990 年，218 页。

陈奇猷：《吕氏春秋新校释》，上海：上海古籍出版社，2002 年，473-474，478 页。

梁启雄：《荀子简释》，北京：中华书局，1983 年，107 页。

杨伯峻：《春秋左传注》，北京：中华书局，1995 年，711-712 页。

杨伯峻认为“平板干”是平板干的“高低使其所筑城齐也”，恐误。他说的是施工时具体操作中的技术问题，不应属于规划工作。

同[22]，1518-1519 页。

郭沫若主编：《中国通史》第一册，北京：人民出版社，1976 年，356-357 页。

郭书春：《古代世界数学泰斗刘徽》，济南：山东科学技术出版社，1992 年，100 页。

同[4]，76-78 页。

同[4]，123 页。

同[4]，36 页。

同[4]，97 页。

同[4]，139 页。

郭世荣先生讨论过汉简中的负数，见：“负数的例子”，载于[1]，352-354 页。于振波先生考察过汉简和《考功名》的“负算”概念，见：“汉简‘得算’、‘负算’考”，载《简帛研究》第二辑，北京：法律出版社，1996 年，324-331 页。

邹大海：《出土〈算数书〉初探》，载《自然科学史研究》20 卷第 3 期（2001 年 7 月），193-206 页。

邹大海：《中国数学的兴起与先秦数学》，石家庄：河北科学技术出版社，2001 年。

同[33]。

Shuihudi’ s Bamboo Strips of Qin Dynasty and Mathematics in Pre-Qin Period

Zou Dahai

(Institute for the History of Science, CAS, Beijing 100010)

ABSTRACT: Shuihudi’ s bamboo strips of Qin Dynasty have great significance for the Studies of the history of Chinese science and Technology to which has been paid less attention. This paper makes use of these bamboo strips to discuss mathematics in Pre-Qin Period. The high level mathematical methods were taken as a basis of the Qin’ severe laws, while such severe laws facilitated the development of Chinese Mathematics. The development of ancient Chinese mathematics had relation to the Legalists, but the relation was established not in Han Dynasty but in Warring States. To analyzing Qin Laws combining with other literatures such as Zuo Zhuang, the unearthed mathematics book *Suanshu Shu*, ect, we can do conclude that a great majority of mathematical methods of the *Nine Chapters on Mathematical Procedures* were acquired before Qin Dynasty. Here, the bamboo strips of Shuihudi provides a firm gauge of time.

KEY WORDS: Shui Hu Di' bamboo strips of Qin Dynasty, Mathematics in Pre-Qin Period, *Nine Chapters on Mathematical Procedures*, *Suanshu Shu*, Legalists

附记：虽然本文对睡虎地秦简的应用从方法和思路上看都是崭新的，但第一段中“郭世荣、冯立升先生虽曾用汉简和睡虎地秦简论及数学与社会经济的关系，但较简括且限于秦汉时代”，在表述上有不妥处。郭世荣先生虽然主要关注简文本身的数学意义，并主要据以讨论秦汉经济数学，但他引睡虎地秦简《厩苑律》、《金布律》、《传食律》、《效律》中一些文字后说“这几简中包括了  $1/4$ 、 $2/22$ 、 $1/6$ 、 $1/20$ 、 $1/5$ 、 $1/10$ 、 $1/100$  等，这说明至迟在战国晚期，我国已经有了很多简单的分数。”（见[1]，345-346 页）他还提到“银雀山汉简及睡虎地秦简等都是一些有关地亩和田制的论述，提供了一些有关面积计算的信息。……第五，秦律中田律规定，下级必须经常不断地向上级汇报田地的情况，不论是遇到自然灾害还是得到雨水，抑或耕作情况都要即时上报地亩顷数。这些事实说明：在战国时期土地丈量 and 面积计算在政治、经济发展中都占有重要地位。”（见[1]，355-356 页）这说明郭世荣先生也涉及战国时期，只是内容较少，对秦汉与先秦没有很刻意地区分而已。谨就此不应有的疏失向郭世荣先生和读者表示歉意。